分次预胞腔代数

苏志荣[1, *]，赵丽云[2]
[1,2]（广东工业大学数学与统计学院 广州 510520）

摘要：胞腔代数是近年来备受关注的一种代数结构，而分次代数在表示论之中起着非常重要的作用。基于王涛对预胞腔代数的研究，给出分次预胞腔代数的定义，并且讨论了分次预胞腔代数的表示理论，最后还研究了正则半群代数的分次预胞腔性。

关键词：预胞腔代数，分次代数，正则半群
分类号：O152

Graded Precellular Algebra

Su Zhirong[1, *], Zhao Liyun[2]
[1,2] (College of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: Cellular algebra is an algebraic structure received considerable attention in recent years, and graded algebra plays an important role in the theory of representation. Based on Wang Tao's research on precellular algebra, the definition of graded precellular algebra is given, and the representation theory of graded precellular algebra is discussed. Finally, the graded pre-cellularity of the regular semigroup algebra is studied.

Keywords: precellular algebra, graded algebra, regular semigroup

1 引 言

设R是整环（无零因子交换幺环），本文中的分次$R-$模指的是$R-$模$M: M = \oplus_{d\in Z} M_d$。如果$m \in M_d$，$d \in Z$，则$m$是$d$齐次的，并且记作$degm = d$。如果$M$是分次$R-$模，设$\underline{M}$是$M$忘记分次得到的非分次$R-$模。如果$M$是分次$R-$模，$s \in Z$，设$M\langle s\rangle$是通过$M$提升了次数$s$所得到的分次$R-$模，也就是说，$M\langle s\rangle_d = M_{d-s}$，其中$d \in Z$。

分次$R-$代数指的是一个含幺结合$R-$代数$A = \oplus_{d\in Z} A_d$，它是一个满足对所有的$d, e \in Z$，$A_d A_e \subseteq A_{d+e}$的分次$R-$模。显然$1 \in A_0$且为$A$的分次$A-$代数。一个分次（右）$A-$模$M$指的是$\underline{M}$是一个$\underline{A}-$模且对所有的$d, e \in Z$，$M_d A_e \subseteq M_{d+e}$。分次子模、分次左$A-$模等概念都可以用这个显然的方式来定义。设$A - Mod$是所有有限分次$A-$模和保次数的同态的范畴，即就是说，对$M, N \in A - Mod$，$Hom_A(M,N) = \{f \in Hom_A(\underline{M},\underline{N}) | f(M_d) \subseteq N_d, \forall d \in Z\}$，$Hom_A(M,N)$中是次数为0的映射。如果$f \in Hom_A(M\langle d\rangle, N) \cong Hom_A(M, N\langle d\rangle)$，则称$f$是$M$到$N$的次数为$d$的同态，并记为$degf = d$。设对所有$M, N \in A - Mod$，有

$$Hom_A^Z(M,N) = \oplus_{d\in Z} Hom_A(M\langle d\rangle, N) \cong \oplus_{d\in Z} Hom_A(M, N\langle d\rangle)。$$

胞腔代数的出现完美地解答了表示论中的一个最基本的问题——确定不可约表示的参数集。$Graham$和$Lehrer$在文献[1]中首次引入了胞腔代数的概念；Xi和$König$在文献[2]中给出了胞腔代数的一种全新等价定义；芮和兵在文献[3]中

提出了标准基代数，推广了胞腔代数的定义；在标准基代数的基础上，王涛在文献[4]中给出了预胞腔代数的概念；Hu和$Mathas$在文献[5]中给出了分次胞腔代数的概念，推广了胞腔代数的定义。由于分次代数在表示论之中起着非常重要的作用，因此本文将给出分次预胞腔代数的定义，并且讨论了分次预胞腔代数的表示理论。又由于正则半群是一类重要的半群，是半群代数理论的主要研究领域之一，所以最后还研究了正则半群代数的分次预胞腔性。

2 预备知识

在这一节中，我们给出本文需要的一些关于半群的基本概念和定义。本文的R将表示一个整环，自然数集N包括0。本节未提及的概念和定义请见参考文献[6-8]。

我们首先回顾一下关于半群的一些定义和结论。

设S是一个半群，$E(S)$是S的全部幂等元所组成的集合，如果半群S没有单位元，则用S^1表示半群S并上一个单位元，否则$S^1=S$。S上的格林关系$\mathcal{R}$，$\mathcal{L}$，$\mathcal{J}$，$\mathcal{H}$和$\mathcal{D}$在半群理论中起着十分重要的作用[9]，对于$a,b\in S$，有：

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1;$$
$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b;$$
$$a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1;$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\cap\mathcal{R};$$
$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\vee\mathcal{R}。$$

当S是一个有限半群时，格林关系$\mathcal{D}=\mathcal{J}$。设$\mathcal{K}$是S的格林关系之一，取K_a为S的$\mathcal{K}-$类并且包括a，$S/\mathcal{K}$为S的全部的$\mathcal{K}$类所组成的集合。我们定义：

$$aS^1\subseteq bS^1 \Longrightarrow R_a\le R_b;$$
$$S^1a\subseteq S^1b \Longrightarrow L_a\le L_b;$$
$$S^1aS^1\subseteq S^1bS^1 \Longrightarrow J_a\le J_b。$$

因此，可得集合$S/\mathcal{R}$，$S/\mathcal{L}$和$S/\mathcal{J}$上的偏序集。

设S是一个半群，如果对任意$a\in S$，存在$b\in S$，使得$aba=a$，则称S为正则半群。

设S是一个不含零元0的半群，若S没有真理想，则称半群S是单的。含零元0的半群S叫做$0-$单半群，若满足：

1） 除$\{0\}$和本身之外不再有其他的理想；

2） $S^2\neq\{0\}$。

$0-$单半群S称为完全$0-$单半群，如果S含有一个本原幂等元。

设G是一个群，I和Λ是非空的集合，$P=(p_{\lambda k})$是$G^0:=G\cup\{0\}$上的一个正则$\Lambda\times\mathrm{I}$矩阵，即P的每一行和每一列都至少包含一个G^0中的非零元素。设$S=(G\times\mathrm{I}\times\Lambda)\cup\{0\}$，定义$S$上的乘法，任意$a,b\in G$，$k,l\in\mathrm{I}$，$\lambda,\mu\in\Lambda$，有：

$$(a,k,\lambda)(b,l,\mu)=\begin{cases}(ap_{\lambda l}b,k,\mu) & p_{\lambda l}\neq 0;\\ 0 & p_{\lambda l}=0。\end{cases}$$

并且$(a,k,\lambda)0=0(a,k,\lambda)=00=0$。如上定义的$S$是一个完全$0-$单半群，我们将用$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$来表示。在$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$中，我们可以假设$\mathrm{I}\cap\Lambda=\{0\}$，$G=$

$(G,0,0)$，$p_{0,0}=e$，其中e是G的单位元。此外对于$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;\mathrm{P})$的任意非零极大子群$G'$，我们有$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;\mathrm{P})\cong\mathcal{M}^0(G',\mathrm{I},\Lambda;\mathrm{P})$。本文的$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$总是满足上述假设。

设S是一个含有零元的半群且$a\in S\setminus\{0\}$。令$S_a=J_a\cup\{0\}$，$0\notin J_a$，则在S_a上定义运算$\circ$，任意$x,y\in J_a$，有：

$$x\circ y=\begin{cases}xy & xy\in J_a;\\ 0 & xy\notin J_a。\end{cases}$$

其中xy是x和y在S上的乘积。显然，$(S_a,\circ)$是一个具有零元 0 的半群。称S_a为S的由a决定的主因子。将此乘法$R-$线性扩展到整个$R-$模$R[J_a]$，我们称$R[J_a]$关于乘法$\circ$是一个$R-$代数。注意，有限正则半群S的每一个主因子都是一个完全$0-$单半群。

任意$a\in S$，则$I(a):=\{b\in S^1aS^1|S^1bS^1\subset S^1aS^1\}$是$S^1aS^1$的一个理想，显然，$S^1aS^1=J_a\dot\cup I(a)$。

半群S的每一个含有幂等元e的$\mathcal{H}-$类H_e是S的一个极大子群；反之，S的每一个极大子群都可以用含幂等元e的$\mathcal{H}-$类H_e来得到。任取$a\in S$，若$e\in J_a$，则$H_e\subseteq J_a\subseteq S_a$。由于$H_e$是$S$的一个极大子群，所以$H_e$也是$S_a$的一个极大子群。

如果$(S,\cdot)$是一个具有零元θ的半群，$R[S]$是域R上的向量空间，并且对于任意$r\in R$，$u,v\in R[S]$，有$r(u\cdot v)=(ru)\cdot v=u\cdot(rv)$，则$R[S]$是半群代数。定义$R_0[S]=R[S]/R[\theta]$。我们称$R-$代数$R_0[S]$是$R$上的$S$的压缩半群代数。若$S$没有零元，则$R_0[S]=R[S]$。设$a\in R_0[S]$，即$a=\sum_{s\in S\setminus\{\theta\}}r_s\,s$。定义$a$的支撑集为：

$$supp(a)=\{s\in S\setminus\{\theta\}|r_s\neq 0\}。$$

引理 2.1[8] 设S是一个半群：

1）若$a,x\in S$，则$xa\in J_a$或$xa\in I(a)$。同理，$ax\in J_a$或$ax\in I(a)$；

2）取$a,e=e^2\in S$。若$a\mathcal{R}e$，则$a=ea$。同理，若$a\mathcal{L}e$，则$a=ae$。

引理 2.2[8] 任意(a,k,λ)，$(b,l,\mu)\in\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$，有如下三个等价论述：

1) $(a,k,\lambda)\mathcal{R}(b,l,\mu)\Leftrightarrow k=l$;
2) $(a,k,\lambda)\mathcal{L}(b,l,\mu)\Leftrightarrow \lambda=\mu$;
3) $(a,k,\lambda)\mathcal{H}(b,l,\mu)\Leftrightarrow k=l,\lambda=\mu$。

此外，完全$0-$单半群的任意非零元素都在同一个$\mathcal{D}-$类之中，以及任意两个含于完全$0-$单半群的极大子群是同构的。

3 分次预胞腔代数

根据王涛对预胞腔代数的研究[4]，我们现在给出分次预胞腔代数的定义。

定义 3.1（分次预胞腔代数） 设A是一个R上有限自由$Z-$分次$R-$代数。称A是一个具有分次预胞腔结构(Λ,M,C,deg)的分次预胞腔代数，其中$(\Lambda,<)$是偏序集，任意$\lambda\in\Lambda$，$M(\lambda)$都是一个有限集，且

$$C:\coprod_{\lambda\in\Lambda}M(\lambda)\times M(\lambda)\longrightarrow A;(S,T)\longrightarrow C_{S,T}^{\lambda};$$

$$deg:\coprod_{\lambda\in\Lambda}M(\lambda)\longrightarrow Z$$

是两个映射，其中C是单射。且

(GP1) $\{C_{S,T}^{\lambda}|S,T\in M(\lambda),\lambda\in\Lambda\}$是$A$的一组$R-$基。

(GP2) $S,T\in M(\lambda),\lambda\in\Lambda$，基元素$C_{S,T}^{\lambda}$的次数$deg(C_{S,T}^{\lambda})=degS+degT$。

(GP3) 任意$a\in A$且$S,T\in M(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda$，有

$$C_{S,T}^{\lambda}a\equiv R_a(T',T)C_{S,T'}^{\lambda}\ \ (modA(<\lambda))。$$

其中系数$R_a(T',T)\in R$且不依赖于S，$A(<\lambda)$是由$\{C_{U,V}^{\mu}|\mu<\lambda,U,V\in M(\mu)\}$中的元素$R-$线性张成的$A$的$R-$子模。

(GP4) 任意$a\in$ A且$S,T\in M(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda$，有

$$aC_{S,T}^{\lambda}\equiv L_a(S',S)C_{S',T}^{\lambda}\ \ (modA(<\lambda))。$$

其中系数$L_a(S',S)\in R$且不依赖于T，$A(<\lambda)$是由$\{C_{U,V}^{\mu}|\mu<\lambda,U,V\in M(\mu)\}$中的元素$R-$线性张成的$A$的$R-$子模。

分次预胞腔代数指的是一个具有分次预胞腔结构的分次代数，基$\{C_{S,T}^{\lambda}|S,T\in M(\lambda),\lambda\in\Lambda\}$为$A$的一个分次预胞腔基。

定义 3.2（分次预胞腔模） 设A是一个具有分次预胞腔结构(Λ,M,C,deg)的分次预胞腔代数，固定$\lambda\in\Lambda$，则右分次预胞腔模指的是分次右$A-$模$C^{\lambda}=\bigoplus_{d\in Z}C_d^{\lambda}$，其中$C_d^{\lambda}$是具有基$\{C_S^{\lambda}|S\in M(\lambda),degS=d\}$的自由$R-$模，$A$在$C^{\lambda}$上的作用为$C_S^{\lambda}a=\sum_{T'\in M(\lambda)}R_a(T',T)C_{T'}^{\lambda}$，这里的系数$R_a(T',T)$就是(GP3)中出现的系数。类似地，$C^{\lambda}$也是左分次预胞腔模，通过$A$在$C^{\lambda}$上的作用$aC_S^{\lambda}=\sum_{S'\in M(\lambda)}L_a(S',S)C_{S'}^{\lambda}$，这里的系数$L_a(S',S)$就是(GP4)中出现的系数。

根据定义 3.2，为了更好地区分右分次$A-$模以及左分次$A-$模，我们使用符号C^{λ}和$C^{\lambda\prime}$来分别表示。设$A(\le\lambda)$是由$\{C_{S,T}^{\mu}|\mu<\lambda$或$\mu=\lambda$且$S,T\in M(\mu)\}$中的元素$R-$线性张成的$R-$模，根据定义 3.1 知，$A(\le\lambda)$是$A$的双边理想且

$$A(\le\lambda)/A(<\lambda)\cong C^{\lambda'}\otimes_R C^{\lambda}\cong\bigoplus_{T\in M(\lambda)}C^{\lambda}\langle degT\rangle,$$

其中第一个同构是作为$A-A-$双模同构，第二个同构是作为分次右$A-$模同构。

设t是N上的不定数，如果$M=\bigoplus_{k\in Z}M_k$是一个分次$A-$模且使得每个M_k在R上是自由有限秩的，那么它的分次维数是一个$Laurent$多项式

$$Dim_tM=\sum_{k\in Z}(dim_RM_k)t^k\ 。$$

推论 3.3 设A是一个具有分次预胞腔结构(Λ,M,C,deg)的分次预胞腔代数且$\lambda\in\Lambda$，那么

$$Dim_tC^{\lambda}=\sum_{S\in M(\lambda)}t^{degS}\ 。$$

因此，可得

$$Dim_tA=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{S,T\in M(\lambda)}t^{degS+degT}=\sum_{\lambda\in\Lambda}(Dim_tC^{\lambda})^2\ 。$$

设$\lambda\in\Lambda$，根据定义 3.1 以及[4]的定义 3.2.3 知，在C^{λ}上有一个双线性型ϕ_{λ}，它是由以下等式所决定

$$C_{S_1,T_1}^{\lambda}C_{S_2,T_2}^{\lambda}\equiv\phi_{\lambda}(C_{T_1}^{\lambda},C_{S_2}^{\lambda})C_{S_1,T_2}^{\lambda}\ \ (modA(<\lambda)),$$

其中$S_1,S_2,T_1,T_2\in M(\lambda)$。与[4]的命题 3.2.4 类似，根据定义，可以直接得到引理 3.4。

引理 3.4 设$\lambda\in\Lambda$，$a\in A$，$x,y\in C^{\lambda}$，则

1) $\phi_{\lambda}(xa,y)=\phi_{\lambda}(x,ay)$;

2) $xC_{S,T}^{\lambda}=\phi_{\lambda}(x,C_S^{\lambda})C_T^{\lambda}$，其中$S,T\in M(\lambda)$。

现在，我们将环R视为一个具有平凡分次的分次$R-$模，则$R=R_0$。

可以发现$C^\lambda \otimes_R C^\lambda$是一个分次$A-$模，其中$deg(x\otimes y)=degx+degy$。

引理 3.5 设$\lambda\in\Lambda$，则映射

$$f: C^\lambda \otimes_R C^\lambda \longrightarrow R; x\otimes y \mapsto \phi_\lambda(x,y),$$

是一个零次的齐次映射，特别地，$radC^\lambda=\{x\in C^\lambda|\phi_\lambda(x,y)=0,\forall y\in C^\lambda\}$是$C^\lambda$的一个分次子模。

证明：根据引理 3.4 的 1）可知$radC^\lambda$是C^λ的一个子模。因此我们只需要证明双线性型定义了一个零次的齐次映射即可。任意$x,y\in C^\lambda$，设$f(x\otimes y)\neq 0$，令

$$x=\sum_i x_i\,, y=\sum_j y_j\,,$$

这里的x_i以及y_i都是i齐次的。存在i,j使$\phi_\lambda(x_i,y_j)\neq 0$。令$x_i=\sum_S a_S C_S^\lambda$以及$y_j=\sum_T b_T C_T^\lambda$，其中$a_S,b_T\in R$，而且仅当$degS=i$时，$a_S\neq 0$以及仅当$degT=j$时，$b_T\neq 0$。

选定$e\in M(\lambda)$，根据引理 3.4，有

$$\phi_\lambda(x_i,y_j)C_{e,e}^\lambda=\sum_{S,T} a_S b_T \phi_\lambda(C_S^\lambda,C_T^\lambda)C_{e,e}^\lambda \equiv \sum_{S,T} a_S b_T C_{e,S}^\lambda C_{T,e}^\lambda \,(modA(<\lambda)),$$

比较两边的次数可知，只有当$i+j=0$时，才有$\phi_\lambda(x_i,y_j)\neq 0$。即仅当$deg(x\otimes y)=0$时，有$\phi_\lambda(x,y)\neq 0$，这就是我们想要证明的东西。最后，由于$x=\sum_i x_i\in radC^\lambda$且$\phi_\lambda$是齐次的，那么对于全部$i$，有$x_i\in radC^\lambda$，因此$radC^\lambda$是$C^\lambda$的一个分次子模。证毕。

这个引理将允许我们定义C^λ的一个分次商，其中$\lambda\in\Lambda$。

定义 3.6 设$\lambda\in\Lambda$，令$D^\lambda=C^\lambda/radC^\lambda$。

根据定义，D^λ是一个分次右$A-$模。从现在开始，设$R=K$是一个域，$A=\bigoplus_{z\in Z} A_z$是一个分次预胞腔$K-$代数。以下结果可以根据未分次的情况进行证明。

引理 3.7 设K是一个域且$D^\lambda\neq 0$，$\lambda\in\Lambda$，那么

1）右$A-$模D^λ是绝对不可约的分次$A-$模；

2）C^λ的（分次）$Jacobson$根基是$radC^\lambda$；

3）若$\mu\in\Lambda$，M是C^μ的分次$A-$子模，有$Hom_A^{\mathbb{Z}}(C^\lambda,C^\mu/M)\neq 0$，则$\lambda\leq\mu$。此外，若$\lambda=\mu$，则$Hom_A^{\mathbb{Z}}(C^\lambda,C^\lambda/M)=Hom_A(C^\lambda,C^\lambda/M)\cong K$。

证明：任意$x\in C^\lambda\backslash radC^\lambda$且$x$是非零元，故存在$y\in C^\lambda$，使$\phi_\lambda(x,y)\neq 0$。由于$K$是一个域，则设$\phi_\lambda(x,y)=1$。设$y=\sum_{S\in M(\lambda)} r_S C_S^\lambda$，其中$r_S\in K$。任意$T\in M(\lambda)$，设$y_T=\sum_{S\in M(\lambda)} r_S C_{S,T}^\lambda$，则$y_T\in A$。

根据引理 3.4 可知

$$xy_T=x\sum_{S\in M(\lambda)} r_S C_{S,T}^\lambda=\sum_{S\in M(\lambda)} r_S\phi_\lambda(x,C_S^\lambda)C_T^\lambda=\phi_\lambda(x,y)C_T^\lambda=C_T^\lambda,$$

因此，x生成C^λ。这个论点适用于C^λ中任何不属于根的元素，故D^λ是不可约的且$radC^\lambda$是C^λ的唯一极大子模，因此证明了引理 3.7 的 2）。同理可证，对于K的任意扩域，D^λ是不可约的，所以右$A-$模D^λ是一个绝对不可约的分次$A-$模。

设$\theta: C^\lambda\longrightarrow C^\mu/M$是一个$A-$模同态，则存在$a_\theta\in C^\mu$，使得$\theta(x)=M+a_\theta$。所以，任意$T\in M(\lambda)$，有$\theta(C_T^\lambda)=\theta(xy_T)=\theta(x)y_T=M+a_\theta y_T$。又因为当$\lambda>\mu$，$x\in A(\leq\lambda)$时，对于任意$a\in A(\leq\mu)$都有$ax,xa\in A(<\lambda)$以及$C^\lambda$是一个$A-$模。因此，当$\lambda>\mu$时，对于任意$T\in M(\lambda)$，都有$a_\theta y_T=0$，则$\theta(C_T^\lambda)=0$。故可得，若

$Hom_A^{\mathbb{Z}}(C^\lambda, C^\mu/M) \neq 0$，则$\lambda \leq \mu$。假设$\lambda = \mu$，根据引理 3.4 的 2)，我们可以发现

$$\theta(C_T^\lambda) = M + a_\theta y_T = M + \sum_{S \in M(\lambda)} r_S a_\theta C_{S,T}^\lambda = M + C_T^\lambda \phi_\lambda(a_\theta, y)。$$

因此，$\theta: C^\lambda \longrightarrow C^\lambda/M$是一个乘以$\phi_\lambda(a_\theta, y)$所构成的自然投影。则引理 3.7 的 3) 得证。特别地，如果M是C^λ的分次$A-$子模，则任意非零态射$\theta: C^\lambda \longrightarrow C^\lambda/M$都是保持次数的。证毕。

定理 3.8 假设$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda | D^\lambda \neq 0\}$，$K$是一个域，$A$是一个分次预胞腔代数，则

1） 如果$\lambda \in \Lambda_0$，那么右$A-$模D^λ是一个绝对不可约的分次$A-$模；
2） 假设$\lambda, \mu \in \Lambda_0$。存在$k \in Z$使得$D^\lambda \cong D^\mu\langle k\rangle$当且仅当$\lambda = \mu, k = 0$；
3） $\{D^\mu\langle k\rangle | \mu \in \Lambda_0, k \in Z\}$是两两之间互不同构的分次单$A-$模的完全集。

证明：根据引理 3.7，直接可证 1）和 2）。对于 3），可以发现通过提升次数，每一个分次单$A-$模都同构于A的一个极大分次右理想的商，并且A的分次预胞腔基诱导了A的分次滤链，其所有商模都同构于分次预胞腔模次数提升后的直和，因此只需证明每一个C^λ的合成因子都同构于$D^\mu\langle k\rangle$即可，其中$\mu \in \Lambda_0, k \in Z$。证明部分完全按照未分次的情形进行论证即可，具体可以参看文献[4]的定理 3.3.4。证毕。

推论 3.9 假设K是一个域，A是K上的分次预胞腔代数。那么$\{\underline{D}^\mu | \mu \in \Lambda_0\}$是两两之间互不同构的未分次单$A-$模的全集。

证明：根据引理 3.5 可知，对于每个$\lambda \in \Lambda$，子模$radC^\lambda$与分次无关。因此，未分次模$\underline{D}^\mu$恰好是使用忘记分次而得到的A的预胞腔基所构造的模。所以，通过定理 3.7 在忘记分次的情况下，每个（未分次）单模都同构于$\underline{D}^\mu$。证毕。

在给出分次分解矩阵的定义之前，我们首先回顾一下，t是$\mathbb{N}$上的不定数。假设M是一个分次$A-$模，D是一个分次单模。存在$k \in Z$，使$D\langle k\rangle$为M的分次合成因子，设$[M: D\langle k\rangle]$为单模$D\langle k\rangle$的重数。类似地，当$\underline{D}$为$\underline{M}$的合成因子，设$[\underline{M}: \underline{D}]$为$\underline{D}$的重数。

定义 3.10（分次分解矩阵） 设A是一个域上的分次预胞腔代数，则A的分次分解矩阵为$D_A(t) = (d_{\lambda\mu}(t))$，其中

$$d_{\lambda\mu}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [C^\lambda: D^\mu\langle k\rangle]\, t^k, \lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0。$$

根据引理 3.7，我们可以得到以下的结果。

引理 3.11 设$\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0$，则

1） $d_{\lambda\mu}(1) = [\underline{C}^\lambda: \underline{D}^\mu]$；
2） $d_{\mu\mu}(t) = 1, d_{\lambda\mu}(t) \neq 0$当且仅当$\lambda \leq \mu$。

假如分次$A-$模M满足条件：存在一条滤链

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k = M,$$

$M_i (1 \leq i \leq k)$是M的分次子模且存在$\lambda \in \Lambda$，$k \in \mathbb{Z}$，使得$M_i/M_{i-1} \cong C^\lambda\langle k\rangle$。则称$M$具有一条分次预胞腔模滤链。通过文献[10]的定理 3.2 以及定理 3.3，我们可以知道每一个投射$A-$模都是可分次的。

定义 3.12 设R是一个具有单位元的交换环，令S是一个半群，则半群代数$R[S]$是一个具有分次预胞腔结构(Λ, M, C, deg)的$\mathcal{J}$型分次预胞腔代数，如果它满

足定义 3.1，且满足条件：每一个$\lambda \in \Lambda$，任意$S,T \in M(\lambda)$，存在S的一个$\mathcal{J}$ −类J，使得$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right) \subseteq J$。注意$J$可能依赖于所取的$\lambda$。

定义 3.13 半群代数$R[S]$是一个具有分次预胞腔结构(Λ, M, C, deg)的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，如果它既满足定义 3.12，又满足条件：每一个$\lambda \in I$以及$S,T \in M(\lambda)$，存在S的一个$\mathcal{H}$ −类H，使得$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right) \subseteq H$。

4 正则半群代数的分次预胞腔性

定理 4.1 设R是一个整环，$\mathfrak{S}$是一个半群，若$R[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构(Λ, M, C, deg)的$\mathcal{J}$型分次预胞腔代数，则任意 $a \in \mathfrak{S}$，R −代数 $R[J_a]$ 都是一个具有分次预胞腔结构$(\Lambda_a, M_a, C_a, deg_a)$的分次预胞腔代数，其中

- $\Lambda_a = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| 存在S,T \in M(\lambda), supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right) \subseteq J_a,\right\}$;
- $M_a = \cup_{\lambda \in \Lambda_a} M(\lambda)$;
- $C_a = \cup_{\lambda \in \Lambda_a} \left\{C_{S,T}^{\lambda} \middle| S,T \in M(\lambda)\right\}$;
- $deg_a = deg$。

证明：根据我们对$(\Lambda_a, M_a, C_a, deg_a)$的定义，我们只需要证明如下四个问题：

1） $\left\{C_{S,T}^{\alpha} \middle| \alpha \in \Lambda_a, S,T \in M(\alpha)\right\}$是$R[J_a]$的一组$R$ −基。

根据题目假设可知，$\cup_{\alpha \in \Lambda}\left\{C_{S,T}^{\alpha} \middle| S,T \in M(\lambda)\right\}$构成了$R[\mathfrak{S}]$的一组$R$ −基。任意$x \in J_a$，有$x = \sum_{i \in I} \sum_{S,T \in N(i)} r_{S,T}^{i} C_{S,T}^{i}$，其中$r_{S,T}^{i} \in R$，$I \subseteq \Lambda$和$N(i) \subseteq M(i)$。根据假设，$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{J}$型分次预胞腔代数，因此$\cup_{S,T \in M(i)} supp\left(C_{S,T}^{i}\right)$含于$\mathfrak{S}$的某一个$\mathcal{J}$类之中。则$\sum_{i \in I \cap (\Lambda \setminus \Lambda_a)} \sum_{S,T \in N(i)} r_{S,T}^{i} C_{S,T}^{i} = 0$，因此$x = \sum_{i \in I \cap \Lambda_a} \sum_{S,T \in N(i)} r_{S,T}^{i} C_{S,T}^{i} \in R[J_a]$。由此，$R[J_a]$可以由$\left\{C_{S,T}^{\alpha} \middle| \alpha \in \Lambda_a, S,T \in M(\alpha)\right\}$中的元素$R$ −线性表出，即问题（1）得证。

2） 如果$\alpha \in \Lambda_a$，$S,T \in M(\alpha)$和$x \in J_a$，那么

$$C_{S,T}^{\alpha} \circ x \equiv \sum_{T' \in M(\alpha)} R_x(T',T)\, C_{S,T'}^{\alpha} \quad \left(modR[J_a](< \lambda)\right),$$

其中系数$R_x(T',T) \in R$不依赖于S。

根据$\mathcal{J}$型分次预胞腔代数的定义可知，$C_{S,T}^{\alpha} x = \sum_{T' \in M(\alpha)} R_x(T',T)\, C_{S,T'}^{\alpha} + x''$，其中 $x'' \in R[\mathfrak{S}](< \alpha)$，系数 $R_x(T',T) \in R$ 不依赖于 S。取 $x'' = \sum_{w \in W} \sum_{P,Q \in M(w)} R_{x''}(P,Q) C_{P,Q}^{w}$，其中$R_{x''}(P,Q) \in R$，$W = \{w \in \Lambda | w < \alpha\}$。由于$R[\mathfrak{S}]$是一个$J$型分次预胞腔代数，设$x_1'' = \sum_{w \in W \cap \Lambda_a} \sum_{P,Q \in M(w)} R_{x''}(P,Q) C_{P,Q}^{w} \in R[J_a]$，$x_2'' = \sum_{w \in W \cap (\Lambda \setminus \Lambda_a)} \sum_{P,Q \in M(w)} R_{x''}(P,Q) C_{P,Q}^{w} \notin R[J_a]$，则$x'' = x_1'' + x_2''$。因此

$$C_{S,T}^{\alpha} \circ x = \sum_{T' \in M(\alpha)} R_x(T',T)\, C_{S,T'}^{\alpha} + \sum_{w \in W \cap \Lambda_a} \sum_{P,Q \in M(w)} R_{x''}(P,Q) C_{P,Q}^{w} \in R[J_a]。$$

即问题（2）得证。

3） 如果$\alpha \in \Lambda_a$，$S,T \in M(\alpha)$和$x \in J_a$，那么

$$x \circ C_{S,T}^{\alpha} \equiv \sum_{S' \in M(\alpha)} L_x(S',S)\, C_{S',T}^{\alpha} \quad \left(modR[J_a](< \lambda)\right),$$

其中系数$L_x(S',S) \in R$不依赖于T。

根据J型分次预胞腔代数的定义可知，$x C_{S,T}^{\alpha} = \sum_{S' \in M(\alpha)} L_x(S',S)\, C_{S',T}^{\alpha} + x'$，其中 $x' \in R[\mathfrak{S}](< \alpha)$，系数 $L_x(S',S) \in R$ 不依赖于 T。取 $x' = \sum_{i \in I} \sum_{U,V \in M(i)} L_{x'}(U,V) C_{U,V}^{i}$，其中$L_{x'}(U,V) \in R$，$I = \{i \in \Lambda | i < \alpha\}$。由于$R[\mathfrak{S}]$是一个$J$型分次预胞腔代数，设$x_1' = \sum_{i \in I \cap \Lambda_a} \sum_{U,V \in M(i)} L_{x'}(U,V) C_{S,T}^{i} \in R[J_a]$，$x_2' =$

$\sum_{i\in I\cap(\Lambda\setminus\Lambda_a)}\sum_{U,V\in M(i)} L_{x'}(U,V)C_{S,T}^{i} \notin R[J_a]$，则$x' = x_1' + x_2'$。因此

$$x\circ C_{S,T}^{\alpha} = \sum_{S'\in M(\alpha)} L_x(S',S)\,C_{S',T}^{\alpha} + \sum_{i\in I\cap\Lambda_a}\sum_{U,V\in M(i)} L_{x'}(U,V)C_{S,T}^{i} \in R[J_a]。$$

即问题（3）得证。

4） 如此构造的$R-$代数 $R[J_a]$是一个分次代数。

由于$R[\mathfrak{S}]$是一个分次$R-$代数且$deg_a = deg$，则设$R[S] = \oplus_{d\in Z}A_d$，其中$A_d$是由$\{C_{S,T}^{\lambda}|\lambda\in\Lambda, S,T\in M(\lambda), deg(C_{S,T}^{\lambda}) = d\}$所生成的$R-$模。因此，取$A_d'$是由$\{C_{S,T}^{\lambda}|\lambda\in\Lambda_a, S,T\in M(\lambda), deg_a(C_{S,T}^{\lambda}) = deg(C_{S,T}^{\lambda}) = d\}$所生成的$R-$模。显然，$R[J_a] = \oplus_{d\in Z}A_d'$。由于任意$d,e\in Z$都有$A_dA_e\subseteq A_{d+e}$，则可根据二元运算$\circ$的定义，可得$A_d'\circ A_e'\subseteq A_{d+e}$，又因为$(\mathfrak{S}_a,\circ)$是一个半群，则可得$A_d'\circ A_e'\subseteq A_{d+e}'$。故问题（4）得证。

综上所述，对于每一个 $a\in\mathfrak{S}$，$R-$代数 $R[J_a]$ 是一个具有分次预胞腔结构$(\Lambda_a, M_a, C_a, deg_a)$的分次预胞腔代数。

证毕。

定理 4.2 设R是一个整环，完全$0-$单半群$\mathfrak{S} = \mathcal{M}^0(G,\Lambda,\Lambda;P)$，其中$p_{0,0} = e$，映射$f:\Lambda\longrightarrow \mathrm{Z}$。若$R_0[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，则$R[G]$也是一个分次预胞腔代数，其中$G$是$\mathfrak{S}$关于单位元$e$的极大子群。相反，若$R[G]$是一个分次预胞腔代数，且完全$0-$单半群$\mathfrak{S} = \mathcal{M}^0(G,\Lambda,\Lambda;P)$中的正则矩阵$P$的元素$p_{ij}\in G^0$的次数为$f(i)+f(j)$，则$R-$代数$R_0[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。

证明：假设$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构(I,M,C,deg)的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。首先定义

- $K = \{\lambda\in I|存在S,T\in M(\lambda), supp(C_{S,T}^{\lambda})\subseteq G\}$，偏序集$K$可以由$(I,\leq)$推导而出；
- $N(\lambda) = \{S\in M(\lambda)|\lambda\in K, 存在T\in M(\lambda), supp(C_{S,T}^{\lambda})\subseteq G\}$；
- 当$\lambda\in K$，$S,T\in N(\lambda)$时，取$D_{S,T}^{\lambda} = C_{S,T}^{\lambda}$；
- $deg_g = deg$。

为了证明$R[G]$是一个具有分次预胞腔结构(K,N,D,deg_g)的分次预胞腔代数，我们只需要证明如下四个问题：

1） $D := \{D_{S,T}^{\lambda}|\lambda\in K, S,T\in N(\lambda)\}$是$R[G]$的一组$R-$基。

先证$D\subseteq R[G]$。设$S\in N(\lambda)$，则存在$T\in M(\lambda)$，使得$C_{S,T}^{\lambda}\in R[G]$。由于$e$是$R[G]$的左单位元，则我们有$eC_{S,T}^{\lambda} = C_{S,T}^{\lambda}$。任取$T'\in M(\lambda)$，根据定义 3.1 的(GP4)可知，$L_e(S',S)\in R$是一个与$T$无关的常数，因此

$$eC_{S,T'}^{\lambda} = C_{S,T'}^{\lambda} + r'，\ (1)$$

其中$r' = \sum_{\substack{i\in I\\ i<\lambda}}\sum_{U,V\in M(i)} L_{r'}(U,V)C_{U,V}^{i}$，$L_{r'}(U,V)\in R$。由于$supp(eC_{S,T'}^{\lambda})\subseteq R_e$，且等式(1)右边的每一个基元素的支撑都含于某个$\mathcal{H}-$类之中，因此等式(1)右边的任意非0系数的基元素都含于$R[R_e]$，则$C_{S,T'}^{\lambda}\in R[R_e]$。同理，设$T\in N(\lambda)$，则存在$S\in M(\lambda)$，使得$C_{S,T}^{\lambda}\in R[G]$。由于$e$是$R[G]$的右单位元，则我们有$C_{S,T}^{\lambda}e = C_{S,T}^{\lambda}$。任取$S'\in M(\lambda)$，根据定义 3.1 的(GP3)可知，$R_e(T',T)\in R$是一个与$S$无关的常数，因此

$$C_{S',T}^{\lambda}e = C_{S',T}^{\lambda} + r''，\ (2)$$

其中$r'' = \sum_{\substack{i\in I\\ i<\lambda}}\sum_{P,Q\in M(i)} R_{r''}(P,Q)C_{P,Q}^{i}$，$R_{r''}(P,Q)\in R$。由于$supp(C_{S',T}^{\lambda}e)\subseteq L_e$，且等式(2)右边的每一个基元素的支撑都含于某个$\mathcal{H}-$类之中，因此等式(2)右边的任意非0系数的基元素都含于$R[L_e]$，则$C_{S',T}^{\lambda}\in R[L_e]$。任取$S,T\in N(\lambda)$，有

$$C^{\lambda}_{S,T} \in R[R_e] \cap R[L_e] = R[G]。$$

再证$R[G]$可由D中的元素$R-$线性生成。设$a \in R[G]$，则$a = a_1 + a_2$，其中a_1是由D中的元素$R-$线性生成，a_2是由$D' := \{C^{\lambda}_{S,T} | \lambda \in I; S,T \in M(\lambda)\} \backslash D$中的元素$R-$线性生成。当$C^{\lambda}_{S,T} \in D'$，有$supp(C^{\lambda}_{S,T}) \subseteq \mathfrak{S} \backslash \mathrm{G}$，则$a_2 \in R[\mathfrak{S} \backslash G]$，又因为$a_2 = a - a_1 \in R[G]$，因此我们可得$a_2 = 0$。所以$R[G]$可由$D$中的元素$R-$线性生成。

综上，问题(1)得证。

2） 如果$g \in G$，$\lambda \in K$，$D^{\lambda}_{S,T} \in D(\lambda) := \{D^{\lambda}_{S,T} | S,T \in N(\lambda)\}$，那么

$$gD^{\lambda}_{S,T} = \sum_{S' \in N(\lambda)} L_g(S',S)\, D^{\lambda}_{S',T} + g',$$

其中$g' = \sum_{\substack{k \in K \\ k < \lambda}} \sum_{U,V \in N(k)} L_{g'}(U,V) C^{k}_{U,V}$，系数$L_g(S',S) \in R$且不依赖于$T$。

由于$R_0[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{J}$型分次预胞腔代数，因此有

$$gD^{\lambda}_{S,T} = gC^{\lambda}_{S,T} = \sum_{S' \in N(\lambda)} L_g(S',S)\, C^{\lambda}_{S',T} + \sum_{S' \in M(\lambda) \backslash N(\lambda)} L_g(S',S)\, C^{\lambda}_{S',T} + g_0,$$

其中$g_0 = \sum_{\substack{k \in I \\ k < \lambda}} \sum_{U,V \in M(k)} L_{g_0}(U,V) C^{k}_{U,V}$，系数$L_g(S',S)$不依赖于$T$。注意，由于$supp(C^{\lambda}_{S,T}) \subseteq G$和$supp(gC^{\lambda}_{S,T}) \subseteq G$，可得$\sum_{S' \in M(\lambda) \backslash N(\lambda)} L_g(S',S)\, C^{\lambda}_{S',T} + g_0 \subseteq G$。又因为$g_0$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，则$\sum_{S' \in M(\lambda) \backslash N(\lambda)} L_g(S',S)\, C^{\lambda}_{S',T} = 0$，$g_0 \in R[G]$。根据问题(1)可知，$g_0$可以由$D$中的元素$R-$线性表示，并且$g_0$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，问题(2)得证。

3） 如果$g \in G$，$\lambda \in K$，$D^{\lambda}_{S,T} \in D(\lambda) := \{D^{\lambda}_{S,T} | S,T \in N(\lambda)\}$，那么

$$D^{\lambda}_{S,T} g = \sum_{T' \in N(\lambda)} R_g(T',T)\, D^{\lambda}_{S,T'} + g'',$$

其中$g'' = \sum_{\substack{k \in K \\ k < \lambda}} \sum_{U,V \in N(k)} R_{g''}(U,V) C^{k}_{U,V}$，系数$R_g(T',T) \in R$且不依赖于$S$。

同理，由于$R_0[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{J}$型分次预胞腔代数，因此有

$$D^{\lambda}_{S,T} g = C^{\lambda}_{S,T} g = \sum_{T' \in N(\lambda)} R_g(T',T)\, C^{\lambda}_{S,T'} + \sum_{T' \in M(\lambda) \backslash N(\lambda)} R_g(T',T)\, C^{\lambda}_{S,T'} + g_1,$$

其中$g_1 = \sum_{\substack{k \in I \\ k < \lambda}} \sum_{U,V \in M(k)} R_{g_1}(U,V) C^{k}_{U,V}$，系数$R_g(T',T)$不依赖于$S$。注意，由于$supp(C^{\lambda}_{S,T}) \subseteq G$和$supp(C^{\lambda}_{S,T} g) \subseteq G$，可得$\sum_{T' \in M(\lambda) \backslash N(\lambda)} R_g(T',T)\, C^{\lambda}_{S,T'} + g_1 \subseteq G$。又因为$g_1$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，则$\sum_{T' \in M(\lambda) \backslash N(\lambda)} R_g(T',T)\, C^{\lambda}_{S,T'} = 0$，$g_1 \in R[G]$。根据问题(1)可知，$g_0$可以由$D$中的元素$R-$线性表示，并且$g_1$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，问题(3)得证。

4） 如此构造的$R-$代数 $R[G]$是一个分次代数。

由于$R[\mathfrak{S}]$是一个分次$R-$代数且$deg_g = deg$，则设$R[\mathfrak{S}] = \oplus_{d \in Z} A_d$，其中$A_d$是由$\{C^{\lambda}_{S,T} | \lambda \in \Lambda, S,T \in M(\lambda), deg(C^{\lambda}_{S,T}) = d\}$所生成的$R-$模。因此，取$A'_d$是由$\{C^{\lambda}_{S,T} | \lambda \in K, S,T \in N(\lambda), deg_g(D^{\lambda}_{S,T}) = deg(C^{\lambda}_{S,T}) = d\}$所生成的$R-$模。显然，$R[G] = \oplus_{d \in Z} A'_d$。由于任意$d,e \in Z$都有$A_d A_e \subseteq A_{d+e}$，可得$A'_d A'_e \subseteq A_{d+e}$，又因为$G$是$\mathfrak{S}$关于单位元$e$的极大子群，则可得$A'_d A'_e \subseteq A'_{d+e}$。故问题(4)得证。

综上所述，$R-$代数$R[G]$是一个具有分次预胞腔结构(K,N,D,deg_g)的分次预胞腔代数，其中G是$\mathfrak{S}$关于单位元e的极大子群。

相反，假设G的群代数$R[G]$是一个具有分次预胞腔结构(K,M,C,deg)的分次

预胞腔代数，$\mathfrak{S}=\mathcal{M}^0(G,\Lambda,\Lambda;P)$。对于$\lambda\in K$，定义$N(\lambda)=\Lambda\times M(\lambda)$以及$(x,S),(y,T)\in N(\lambda)$，有$D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)}=\left(C^{\lambda}_{S,T},x,y\right)$，$deg_{\mathfrak{S}}\left(D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)}\right)=deg_{\mathfrak{S}}(x,S)+deg_{\mathfrak{S}}(y,T)=degS+f(x)+degT+f(y)\in Z$。接下来我们将开始证明$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构$(K,N,D,deg_{\mathfrak{S}})$的分次预胞腔代数。

根据假设可知，$\{C^{\lambda}_{S,T}|\lambda\in K;S,T\in M(\lambda)\}$是$R[G]$的一组$R-$基，对于任意元素$(a,x,y)\in(R[G],x,y)$都能被$B:=\{D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)}|\lambda\in K;(x,S),(y,T)\in N(\lambda)\}$中的元素$R-$线性表示，因此可证$B$是$R_0[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基。

任取$g\in G$，$u,v\in\Lambda$，有$(g,u,v)\in\mathfrak{S}$。再取基元素$D^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}\in B$，有

$$D^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}(g,u,v)=\left(C^{\alpha}_{S,T},x,y\right)(g,u,v)=\left(C^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g,x,v\right),$$

又由于$R[G]$是一个具有分次预胞腔结构(K,N,D,deg_g)的分次预胞腔代数，有

$$C^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g=\sum_{T'\in M(\alpha)}R_{p_{y,u}g}(T',T)C^{\alpha}_{S,T'}+\sum_{\lambda<\alpha;\lambda\in K;U,V\in M(\lambda)}R(\lambda,U,V)C^{\lambda}_{U,V}\text{，}\quad(3)$$

其中上述等式系数$R_{p_{y,u}g}(T',T)\in R$但不依赖于S。由于元素$C^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g$可由$R[G]$中的$R-$基$\{C^{\lambda}_{S,T}|\lambda\in K;S,T\in M(\lambda)\}$线性表示，可写成

$$C^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g=\sum_{\lambda\in K;U,V\in M(\lambda)}R(\alpha,S,T,y,u,g;\lambda,U,V)C^{\lambda}_{U,V}\text{。}\quad(4)$$

对比等式(3)和(4)，可以发现，对于任意$T'\in M(\alpha),\lambda<\alpha,U,V\in M(\lambda)$都有$R(\alpha,S,T,y,u,g;\lambda,T',T)=R_{p_{y,u}g}(T',T)$以及$R(\alpha,S,T,y,u,g;\lambda,U,V)=R(\lambda,U,V)$，显然也可以发现$R(\alpha,S,T,y,u,g;\lambda,T',T)$不依赖于$x$，又因为$R_{p_{y,u}g}(T',T)$也不依赖于$S$，因此我们可以得到$R(\alpha,S,T,y,u,g;\lambda,T',T)$不依赖于$x$和$S$。有

$$D^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}(g,u,v)\equiv\sum_{(v,T')\in N(\lambda)}R(\alpha,S,T,y,u,g;\lambda,T',T)D^{\alpha}_{(x,S),(v,T')}\quad\left(modR_0[\mathfrak{S}](<\alpha)\right)\text{。}$$

因此，定义 3.1 的(GP3)得证。

同理，任取$g\in G$，$u,v\in\Lambda$，有$(g,u,v)\in\mathfrak{S}$。再取基元素$D^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}\in B$，有

$$(g,u,v)D^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}=(g,u,v)\left(C^{\alpha}_{S,T},x,y\right)=\left(gp_{v,x}C^{\alpha}_{S,T},u,y\right),$$

又由于$R[G]$是一个具有分次预胞腔结构(K,N,D,deg_g)的分次预胞腔代数，有

$$gp_{v,x}C^{\alpha}_{S,T}=\sum_{S'\in M(\alpha)}L_{gp_{v,x}}(S',S)C^{\alpha}_{S',T}+\sum_{\lambda<\alpha;\lambda\in K;U,V\in M(\lambda)}L(\lambda,U,V)C^{\lambda}_{U,V}\text{，}\quad(5)$$

其中上述等式系数$L_{gp_{v,x}}(S',S)\in R$但不依赖于T。由于元素$gp_{v,x}C^{\lambda}_{S,T}$可由$R[G]$中的$R-$基$\{C^{\lambda}_{S,T}|\lambda\in K;S,T\in M(\lambda)\}$线性表示，可写成

$$gp_{v,x}C^{\alpha}_{S,T}=\sum_{\lambda\in K;U,V\in M(\lambda)}L(\alpha,S,T,v,x,g;\lambda,U,V)C^{\lambda}_{U,V}\text{。}\quad(6)$$

对比等式(5)和(6)，可以发现，对于任意$S'\in M(\alpha),\lambda<\alpha,U,V\in M(\lambda)$都有$L(\alpha,S,T,v,x,g;\lambda,S',S)=L_{gp_{v,x}}(S',S)$以及$L(\alpha,S,T,v,x,g;\lambda,U,V)=L(\lambda,U,V)$，显然也可以发现$L(\alpha,S,T,v,x,g;\lambda,S',S)$不依赖于$y$，又因为$L_{gp_{v,x}}(S',S)$也不依赖于$T$，因此我们可以得到$L(\alpha,S,T,v,x,g;\lambda,S',S)$不依赖于$y$和$T$。有

$$(g,u,v)D^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}\equiv\sum_{(u,S')\in N(\lambda)}L(\alpha,S,T,v,x,g;\alpha,S',S)D^{\alpha}_{(u,S'),(y,T)}\quad\left(modR_0[\mathfrak{S}](<\alpha)\right)\text{。}$$

因此，定义 3.1 的(GP4)得证。

设A_d是由$\{D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)} | deg_{\mathfrak{S}}(D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)}) = d \in Z; \lambda \in K; (x,S),(y,T) \in N(\lambda)\}$中元素$R-$线性生成的，则$R_0[\mathfrak{S}] = \oplus_{d\in Z} A_d$。取$D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)} \in A_d$，$D^{\mu}_{(w,U),(q,V)} \in A_l$，即$degS + f(x) + degT + f(y) = d$，$degU + f(w) + degV + f(q) = l$，考虑$D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)} D^{\mu}_{(w,U),(q,V)}$的次数。根据$R[G]$是一个分次预胞腔代数，设$A'_d$是由$\{C^{\lambda}_{S,T} | deg(C^{\lambda}_{S,T}) = d \in Z, \lambda \in K, S,T \in M(\lambda)\}$中元素$R-$线性生成的，则$R[G] = \oplus_{d\in Z} A'_d$，$A'_d A'_l \subseteq A'_{d+l}$。

$D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)} D^{\mu}_{(w,U),(q,V)} = (C^{\lambda}_{S,T}, x, y)(C^{\mu}_{U,V}, w, q) = (C^{\lambda}_{S,T} p_{yw} C^{\mu}_{U,V}, x, q)$，其中$deg(C^{\alpha}_{S,T} p_{yw} C^{\mu}_{U,V}) = degS + degT + f(y) + f(w) + degU + degV$，则有$deg_{\mathfrak{S}}\left(D^{\lambda}_{(x,S),(y,T)} D^{\mu}_{(w,U),(q,V)}\right) = deg_{\mathfrak{S}}(C^{\lambda}_{S,T} p_{yw} C^{\mu}_{U,V}, x, q) = degS + degT + f(y) + f(w) + degU + degV + f(x) + f(q) = d + l$。因此，$A_d A_l \subseteq A_{d+l}$。则$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构$(K, N, D, deg_{\mathfrak{S}})$的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。

证毕。

定理 4.3 设R是一个整环，$\mathfrak{S}$是一个主因子为$\mathcal{M}^0 = (G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$的有限正则半群且$\mathfrak{S}$是完全$0-$单半群的$0-$直并，其中$\alpha$取遍$Y = \mathfrak{S}/\mathcal{J}$。设映射$f_\alpha: \Lambda_\alpha \longrightarrow \mathrm{Z}$，$E = \{e \in \mathfrak{S} | 0 \neq e = e^2\}$。取$e \in E$，令$G_e$为$\mathfrak{S}$关于单位元$e$的极大子群。如果对于$\alpha \in Y$，都有$E_\alpha := E \cap E(\mathcal{M}^0 = (G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)) \neq \emptyset$，若$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，则任意$\alpha \in Y$，存在$e \in E_\alpha$，使得$R[G_e]$也是一个分次预胞腔代数。相反，若任意$\alpha \in Y$，存在$e \in E_\alpha$，$R[G_e]$是一个分次预胞腔代数，且完全$0-$单半群$\mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha) \cong \mathcal{M}^0(G_e, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$中的正则矩阵$P_\alpha$的元素$p_{ij} \in {G_e}^0$的次数为$f_\alpha(i) + f_\alpha(j)$，则$\mathfrak{S}$的主因子的$R-$代数以及$R[\mathfrak{S}]$都是$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。

证明：假设$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构(I, M, C, deg)的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，根据定理 4.1 可知，任意$a \in \mathfrak{S}$，都有$R[J_a]$是一个具有分次预胞腔结构(I_a, M_a, C_a, deg_a)的分次预胞腔代数。选定$\alpha \in Y$，令$J_a = \mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha) \backslash \{0\}$，则有$\mathfrak{S}_a \cong \mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$。又因为$E_\alpha \neq \emptyset$，则存在$e \in E_\alpha$，使得$\mathfrak{S}_a = \mathcal{M}^0(G_e, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$。定义单位元$e = (e, 0, 0)$，根据定理 4.2，我们可证得$R[G_e]$也是一个分次预胞腔代数。

相反，假设任意$\alpha \in Y$，存在$e \in E_\alpha$，使得$R[G_e]$是一个分次预胞腔代数。任取$a \in S$，先证$R[J_a]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。因为$\mathfrak{S}$是一个主因子为$\mathcal{M}^0 = (G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$的有限正则半群，因此存在$\alpha \in Y$，使得$a$决定的主因子$(\mathfrak{S}_a := J_a \cup \{0\}, \circ)$为$\mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$。选定$e \in E_\alpha$，使得$R[G_e]$是一个具有分次预胞腔结构$(K, M, C, deg)$的分次预胞腔代数，根据定理 4.2 的证明可知，$R[J_a]$是一个具有分次预胞腔结构$(K_a, M_a, D_a, deg_a)$的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，其中$K_a := K$，$M_a(\lambda) := \Lambda_\alpha \times M(\lambda)$，任意$(x,S),(y,T) \in M_a(\lambda)$，有$D^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)} := (C^{\lambda}_{a;S,T}, x, y)$且$deg_a(D^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}) = deg_a(x,S) + deg_a(y,T) = degS + f_\alpha(x) + degT + f_\alpha(y)$。

现在我们要证$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构$(\mathfrak{T}, N, D, deg_{\mathfrak{S}})$的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，其中$\mathfrak{T} = \cup_{a\in\mathfrak{J}}(a, K_a)$，定义偏序$\leq$：任意$a, b \in \mathfrak{J}$，$\lambda \in K_a$，$\mu \in K_b$以及$\lambda \neq \mu$，则$(a,\lambda) < (b,\mu) \Leftrightarrow J_a < J_b$或者当$J_a = J_b$时，$\lambda < \mu$且$\lambda, \mu \in K_a$。任取$(a,\lambda) \in (a, K_a)$，定义$N(a,\lambda) = M_a(\lambda)$，任意$U,V \in N(a,\lambda)$，有$D^{(a,\lambda)}_{U,V} = D^{\lambda}_{a;U,V}$且$deg_{\mathfrak{S}}\left(D^{(a,\lambda)}_{U,V}\right) = deg_{\mathfrak{S}}U + deg_{\mathfrak{S}}V = deg_a U + deg_a V$。

设$\mathfrak{J}$为$\mathfrak{S}$的$\mathcal{J}-$类的所有代表元所构成的集合。根据假设，$\mathfrak{S} = \cup_{i\in\mathfrak{J}} \mathfrak{S}_i$，任意$a, b \in \mathfrak{J}$且$a \neq b$，有$\mathfrak{S}_a \mathfrak{S}_b = \{0\}$。由于$R[J_a]$是一个具有分次预胞腔结构$(K_a, M_a, D_a, deg_a)$的$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，则$\cup_{(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D^{(a,\lambda)}_{U,V} \middle| U,V \in N(a,\lambda)\right\}$

构成$R[J_a]$的一组R－基。则可以证得$H := \bigcup_{a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D_{U,V}^{(a,\lambda)}\middle|U,V\in N(a,\lambda)\right\}$构成$R_0[\mathfrak{S}]$的一组$R$－基，定义 3.1 的(GP1)得证。

假设$a,b\in\mathfrak{J}$，若$b\in I(a)$，$\mu\in K_b$以及$\alpha\in K_a$，有$(b,\mu)<(a,\alpha)$。事实上

$$b\in I(a)\Leftrightarrow\mathfrak{S}^1 b\mathfrak{S}^1\subset\mathfrak{S}^1 a\mathfrak{S}^1\Leftrightarrow J_b<J_a。$$

如果$b\in I(a)$，那么对于任意$\mu\in K_b$以及$\lambda\in K_a$，都有$(b,\mu)<(a,\lambda)$。现在我们可以假设$\lambda\in K_a$，$(x,S),(y,T)\in M_a(\lambda)$以及$c\in\mathfrak{S}$，考虑$D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c=D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}c$，其中$D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}\in R[J_a]$。又因为令$G_e=(G_e,0,0)$，则根据$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right)\subseteq G_e$，有$supp\left(D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}\right)\subseteq R[(G,x,y)]$。

根据引理 2.1，有$(e,0,y)c\in J_a$或者$(e,0,y)c\in I(a)$。

假设$(e,0,y)c\in I(a)$。有

$$D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c=D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}c=\left(C_{a;S,T}^{\lambda},x,0\right)(e,0,y)c。$$

因为$I(a)$是$\mathfrak{S}^1 a\mathfrak{S}^1$的一个理想，因此可得$D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c\in R[I(a)]$。存在$\mathfrak{J}_1\subset\mathfrak{J}$，使得$\mathfrak{J}_1\subseteq I(a)$以及$D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c\in\bigcup_{h\in\mathfrak{J}_1}R[J_h]$。又由于当$h\in\mathfrak{J}_1,\mu\in K_b$以及$\alpha\in K_a$时，有$(b,\mu)<(a,\alpha)$，因此可得$\bigcup_{h\in\mathfrak{J}_1}R[J_h]\subset R[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)$，即$D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c\in R[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)$。

假设$(e,0,y)c\in J_a$，有

$$\begin{aligned}D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c&=D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}c\\&=\left[\left(C_{a;S,T}^{\lambda},x,0\right)(e,0,y)\right]c\\&=\left(C_{a;S,T}^{\lambda},x,0\right)[(e,0,y)c]\\&=D_{(x,S),(0,T)}^{(a,\lambda)}[(e,0,y)c]。\end{aligned}$$

由于$R[J_a]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，有

$$D_{(x,S),(0,T)}^{(a,\lambda)}[(e,0,y)c]=\sum_{(t,T')\in N(a,\lambda)}R_{(e,0,y)c}\big((t,T'),(0,T)\big)D_{a;(x,S),(t,T')}^{\lambda}+w，\quad(7)$$

其中$w\in R[J_a](<\lambda)$，系数$R_{(e,0,y)c}\big((t,T'),(0,T)\big)\in R$且不依赖$(x,S)$。

由于$Q := \bigcup_{a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D_{U,V}^{(a,\lambda)}\middle|U,V\in N(a,\lambda)\right\}$构成$R[\mathfrak{S}]$的一组$R$－基。由于$D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}c$可以由 Q 中的元素$R$－线性表示，有

$$D_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}c=\sum R(\lambda,x,S,t,T')D_{a;(x,S),(t,T')}^{\lambda}+w'，\quad(8)$$

其中w'是由$\{D_{b;U',V'}^{\mu}|b\in\mathfrak{J};(b,\mu)\neq(a,\lambda);U',V'\in N(b,\mu)\}$中的元素$R$－线性表示。对比等式(7)和(8)可知，$D_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}c\equiv\sum_{(t,T')\in N(a,\lambda)}R_{(e,0,y)c}\big((t,T'),(0,T)\big)D_{(x,S),(t,T')}^{(a,\lambda)}\ \Big(modR[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)\Big)$。则定义 3.1 的(GP3)得证。

同理，根据引理 2.1，有$c(e,x,0)\in J_a$或者$c(e,x,0)\in I(a)$。

假设$c(e,x,0)\in I(a)$。有

$$cD_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}=cD_{a;(x,S),(y,T)}^{\lambda}=c(e,x,0)(C_{a;S,T}^{\lambda},0,\mathrm{y})。$$

因为$I(a)$是$\mathfrak{S}^1 a\mathfrak{S}^1$的一个理想，因此可得$cD_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}\in R[I(a)]$。存在$\mathfrak{J}_2\subset\mathfrak{J}$，使得$\mathfrak{J}_2\subseteq I(a)$以及$cD_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}\in\bigcup_{b\in\mathfrak{J}_2}R[J_b]$。又由于当$b\in\mathfrak{J}_2,\mu\in K_b$以及$\alpha\in K_a$时，有$(b,\mu)<(a,\alpha)$，因此可得$\bigcup_{b\in\mathfrak{J}_2}R[J_b]\subset R_0[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)$，即$cD_{(x,S),(y,T)}^{(a,\lambda)}\in R_0[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)$。

假设$c(e,x,0)\in J_a$，有

$$\begin{aligned} cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} &= cD^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)} \\ &= c\left[(e,x,0)\left(C^{\lambda}_{a;S,T},0,y\right)\right] \\ &= c(e,x,0)\left(C^{\lambda}_{a;S,T},0,y\right) \\ &= c(e,x,0)D^{(a,\lambda)}_{(0,S),(y,T)}。\end{aligned}$$

由于$R[J_a]$是一个分次预胞腔代数，有

$$c(e,x,0)D^{(a,\lambda)}_{(0,S),(y,T)} = \sum_{(s,S')\in N(a,\lambda)} L_{c(e,x,0)}\left((s,S'),(0,S)\right)D^{\lambda}_{a;(s,S'),(y,T)} + z， \quad (9)$$

其中$z\in R[J_a](<\lambda)$，系数$L_{c(e,x,0)}\left((s,S'),(0,S)\right)\in R$且不依赖$(y,T)$。

由于$Q := \cup_{a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D^{(a,\lambda)}_{U,V}\middle| U,V\in N(a,\lambda)\right\}$构成$R[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基。由于$cD^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}$可以由 Q 中的元素$R-$线性表示，有

$$cD^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)} = \sum L(\lambda,s,S',y,T)D^{\lambda}_{a;(s,S'),(y,T)} + z'， \quad (10)$$

其中z'是由$\{D^{\mu}_{b;U',V'}|b\in\mathfrak{J};(b,\mu)\neq(a,\lambda);U',V'\in N(b,\mu)\}$中的元素$R-$线性表示。对比等式(9)和(10)可知，$cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} \equiv \sum_{(s,S')\in N(a,\lambda)} L_{c(e,x,0)}\left((s,S'),(0,S)\right)D^{(a,\lambda)}_{(s,S'),(y,T)} \ \left(modR[\mathfrak{S}](<(a,\lambda))\right)$。则定义 3.1 的(GP4)得证。

设A_d是由$\left\{D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} \middle| deg_{\mathfrak{S}}\left(D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}\right) = d\in Z; a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a);(x,S),(y,T)\in N(a,\lambda)\right\}$中元素$R-$线性生成的，显然$R[\mathfrak{S}] = \oplus_{d\in Z}A_d$。取$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}\in A_d$，$D^{(b,\mu)}_{(w,U),(q,V)}\in A_l$，即$deg_aS + f_a(x) + deg_aT + f_a(y) = d$，$deg_bU + f_b(w) + deg_bV + f_b(q) = l$，考虑$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}D^{(b,\mu)}_{(w,U),(q,V)}$的次数。显然$supp\left(D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}\right)\subseteq J_a\subset\mathfrak{S}_a$，$supp\left(D^{(b,\mu)}_{(w,U),(q,V)}\right)\subseteq J_b\subset\mathfrak{S}_b$。当$a\neq b$，则$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}D^{(b,\mu)}_{(q,U),(w,V)} = 0$；当$a=b$，显然$deg_{\mathfrak{S}}\left(D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}D^{(b,\mu)}_{(w,U),(q,V)}\right) = deg_aS + deg_aT + f_a(y) + f_b(w) + deg_bU + deg_bV + f_a(x) + f_b(q) = d + l$。因此，$A_dA_l\subseteq A_{d+l}$。

综上所述，$R[\mathfrak{S}]$是一个具有分次预胞腔结构$(\mathfrak{T},N,D,deg_{\mathfrak{S}})$的分次预胞腔代数，显然$R[\mathfrak{S}]$也满足$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数的定义，因此$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。

证毕。

推论 4.4 设R是一个整环，$\mathfrak{S}$是一个主因子为$\mathcal{M}^0 = (G_\alpha,\Lambda_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)$的有限正则半群且$\mathfrak{S}$是完全$0-$单半群的$0-$直并，其中$\alpha$取遍$Y = \mathfrak{S}/\mathcal{J}$。设映射$f_\alpha:\Lambda_\alpha\longrightarrow$ Z，E是$\mathfrak{S}$的所有幂等元所构成的集合，任取$e\in E$，令G_e为$\mathfrak{S}$关于单位元e的极大子群。任意$\alpha\in Y = \mathfrak{S}/\mathcal{J}$，有$E\cap E\left(\mathcal{M}^0 = (G_\alpha,\Lambda_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)\right)\neq\emptyset$，若$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数，则任意$e\in E$，都有群代数$R[G_e]$是一个分次预胞腔代数。相反，若$R[G_e]$是一个分次预胞腔代数，且完全$0-$单半群$\mathcal{M}^0(G_\alpha,\Lambda_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)\cong\mathcal{M}^0(G_e,\Lambda_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)$中的正则矩阵$P_\alpha$的元素$p_{ij}\in {G_e}^0$的次数为$f_\alpha(i)+f_\alpha(j)$，则$\mathfrak{S}$的主因子的$R-$代数以及$R[\mathfrak{S}]$都是$\mathcal{JH}$型分次预胞腔代数。

参考文献：

[1] J.J. Graham, G.I. Lehrer. Cellular algebras[J]. Inventiones Mathematicae, 1996, 123(1):1-34.

[2] S. König, C.C. Xi. On the structure of cellular algebras[J]. Proceedings of ICRA VIII, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, Canadian Mathematical Society, Ottawa, 1998, 24:365–386.

[3] H.B. Rui. Based algebras and standard bases for quasi-hereditary algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1998, 350(8):3207-3235.

[4] 王涛. 预胞腔代数[D]. 南京: 南京大学, 2015.

[5] J. Hu, A. Mathas. Graded cellular bases for the cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier algebras of type A[J]. Advances in Mathematics, 2000, 225(2):598-642.

[6] J.M. Howie. Fundamentals of semigroup theory[M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.

[7] J. Okniński. Semigroup Algebras[M]. New York: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., 1991.

[8] J.M. Howie. An Introduction to Semigroup Theory[M]. London: Academic Press, 1976.

[9] J.A. Green. On the structure of semigroups[J]. Annals of Mathematics, 1951, 54(2):163–172.

[10] R. Gordon and E. L. Green, Graded Artin algebras[J]. Journal of Algebra, 1982, 76:111–137.

(通讯作者:苏志荣 E-mail:2112014026@mail2.gdut.edu.cn)